التمرين الأول:(05نقاط)

1°) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2-2z+5=0$.

2°) نعتبر في المستوي المركب المنسوب على معلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{i},\vec{j})$

النقط I ، B ، A التي لواحقها على الترتيب $z_1=1-2i$ ، $z_B=-3$ ، $z_A=2+\overline{z_1}$.

أ/ اكتب على الشكل الجبري العدد المركب : $z=\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$.

ب/ اكتب العدد المركب Z على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث IAB .

جـ/ احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

3°) ا / لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1);(C;1)\}$ احسب z_G لاحقة النقطة G .

ب/ عين طبيعة المجموعة (Γ_1) مجموعةالنقط M ذات اللاحقة Z من المستوي حيث :

$$2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

جـ / عين طبيعة المجموعة (Γ_2) مجموعةالنقط M ذات اللاحقة Z من المستوي حيث :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$$

التمرينالثاني:(05نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=\sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$$

1- احسب الحدود u_2, u_3،و u_4 (تدوّر النتائج الى 10^{-2}) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2- ا- بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$: $u_n\leq n+3$

ب- بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

3- $(v_n)_{n\geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة بـ : $v_n=u_n-n$

ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين حدها العام v_n

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n

4- نضع من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_2 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_n$

$S'_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ و $T_n = \frac{S'_n}{n^2}$ احسب المجموعين S_n و S'_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n \to +\infty} T_n$

التمرين الثالث (04نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o\, \vec{i}\, ; \vec{j}\, ; \vec{k})$: نعتبر النقط: $A(3,2,1)$; $B(3,5,4)$ و $C(0,5,1)$

1- بين ان المثلث ABC متقايس الأضلاع

2- تحقق ان الشعاع $\vec{n}(1,1,-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له

3- ا- عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

ب- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC)

جـ - تحقق ان النقطة $F(4,6,0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) ثم احسب حجم رباعي الوجوه FABC

4– بين ان المستقيمين (FA) و (BC) متعامدين

5- ا- عين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MF}\right\| = 6$

ب- عين الوضع النسبي للمجموعة (S) والمستوي (ABC)

التمرين الرابع : (06 نقاط)

I) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-\infty,3[$ كمايلي : $g(x) = \frac{-x+1}{-x+3} + \ln(-x+3)$

1) احسب نهايات g عند اطراف مجال تعريفها .

2) أدرس تغيرات الدالة g .

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1{,}5;1{,}7[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty,3[$ كمايلي: $f(x) = (x-1)\ln(-x+3)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$) .

°1) أ / - احسب نهايات f عند اطراف مجال تعريفها .

ب /- أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تعيراتها.

°2) بين ان $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$ ثم استنتج حصرا لــ $f(\alpha)$.

°3) حل في المجال $]-\infty;3[$ المعادلة : $f(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty,3[$

°4) احسب $f(-2)$ و $f(-3)$ ثم ارسم بدقة المنحنى (C_f) .

°5) F دالة عددية على المجال $]-\infty,3[$ كمايلي: $F(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right)\ln(-x+3)$

تحقق ان F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty,3[$

التمرين الأول : $Z^2-2Z+5=0$

1) $\Delta=-16$ حلا المعادلة هما: 1

$Z_1=\frac{2+i\sqrt{16}}{2}=1+2i$ و $\boxed{Z_2=1-2i}$

أ/ $Z_I=1-2i$ ، $Z_B=-3$ ، $Z_A=2+\overline{Z_I}$

$Z_A=3+2i$

$$Z=\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}=\frac{1-2i-3-2i}{1-2i+3}=\frac{-2-4i}{4-2i}$$

$$Z=\frac{-1-2i}{2-i}=\frac{(-1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-2-i-4i+2}{4+1}$$

0.5 $Z=\frac{-5i}{5}$ ومنه : $\boxed{Z=-i}$

ب) 0.5 $\boxed{Z=e^{-\frac{\pi}{2}i}}$

$\left|\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}\right)=\frac{-\pi}{2}$

0.5 $AI=BI$ و $(\vec{IB};\vec{IA})=\frac{-\pi}{2}$

AIB قائم في I ومتساوي الساقين

ج) لدينا $h(A;2)$ تحاكي و $h(I)=C$

الكتابة المركبة لتحاكي: $Z'-Z_A=2(Z-Z_A)$

$h(I)=C$ ومنه : $Z_C-Z_A=2(Z_I-Z_A)$

$Z_C=2Z_I-Z_A$

0.5 $Z_C=2-4i-3-2i=-1-6i$

$\boxed{Z_C=-1-6i}$

3) G مرجح الجملة : $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ 0.5

أ) $Z_G=\frac{Z_A-Z_B+Z_C}{1-1+1}=3+2i+3-1-6i=5-4i$

ب) $2\|\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\|==\|\vec{MA}+\vec{MB}\|$

لتكن H منتصف $[AB]$

$2\|(1-1+1)\vec{MG}\|=\|(1+1)\vec{MH}\|$

0.75 $2MG=2MH$ ومنه : $\boxed{MG=MH}$

مجموعة النقط (Γ_1) محور القطعة $[GH]$

ج) $\|\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\|=4\sqrt5$

0.75 $\|(1-1+1)\vec{MG}\|=4\sqrt5$ ومنه $\boxed{MG=4\sqrt5}$

مجموعة النقط (Γ_2) دائرة مركزها G ونصف قطرها $r=4\sqrt5$

التمرين الثاني : $U_{n+1}=\frac23U_n+\frac13n+1$, $U_1=\sqrt e$

1) حساب u_4,u_3,u_2 :

0.75

$$U_2=\frac23U_1+\frac13+1=\frac23\sqrt e+\frac43=\frac{2\sqrt e+4}{3}\approx 2,43$$

$$U_3=\frac23U_2+\frac23+1=\frac23\left(\frac{2\sqrt e+4}{3}\right)+\frac53=\frac{4\sqrt e+23}{9}\approx 3,28$$

$$U_4=\frac23U_3+\frac33+1=\frac23\left(\frac{4\sqrt e+23}{9}\right)+2=\frac{8\sqrt e+100}{9}\approx 12,58$$

2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n\ge1$: $U_n\le n+3$

* من اجل $n=1$: $U_1=\sqrt e\approx1,6$ ومنه $U_1\le1+3$ (محققة)

*نفرض أن $U_n\le n+3$ صحيحة و نبين أن: $U_{n+1}\le n+4$

لدينا : $U_n\le n+3$ ومنه: $\frac23U_n\le\frac23(n+3)$

1

إذن: $\frac23U_n+\frac13n+1\le\frac23(n+3)+\frac13n+1$

وبالتالي: $U_{n+1}\le n+3$ ومنه $U_{n+1}\le n+3\le n+4$

ومنه : $U_{n+1}\le n+4$ إذن $p(n+1)$ صحيحة

*الإستنتاج : من أجل كل $n\ge1$: $U_n\le n+3$

ب) $U_{n+1}-U_n=\frac23U_n+\frac13n+1-U_n$

$U_{n+1}-U_n=\frac13n+1-\frac13U_n=\frac13(n+3-U_n)$

0.25

لدينا : $U_n\le n+3$ ومنه: $n+3-U_n\ge0$

أي: $\frac13(n+3-U_n)\ge0$ ومنه: $U_{n+1}-U_n\ge0$

ومنه: (U_n) متزايدة

3) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية: $V_n=U_n-n$

لدينا : $V_{n+1}=U_{n+1}-(n+1)$

1

$V_{n+1}=\frac23U_n+\frac13n+1-n-1=\frac23U_n-\frac23n$

$V_{n+1}=\frac23(U_n-n)$ أي : $\boxed{V_{n+1}=\frac23V_n}$

(V_n) هندسية أساسها $q=\frac23$ و حدها الأول $V_1=U_1-1=\sqrt e-1$

ب) عبارة V_n : $V_n=V_1\times q^{n-1}$ 0.25

$\boxed{V_n=(\sqrt e-1)\times\left(\frac23\right)^{n-1}}$

ب) عبارة U_n : $V_n=U_n-n$ 0.25

ومنه $U_n=V_n+n$ إذن : $\boxed{U_n=(\sqrt e-1)\times\left(\frac23\right)^{n-1}+n}$

تابع التمرين الثاني:

4) حساب: $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1V_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2V_2+\dots\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^nV_n$

لدينا : $V_n=V_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$S_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1V_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2V_1\left(\frac{2}{3}\right)^1+\dots\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^nV_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n=V_1\left(\frac{2}{3}\right)\left[\underbrace{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}}\right]$$

$$S_n=V_1\left(\frac{2}{3}\right)\left[\underbrace{1+\left(\frac{4}{9}\right)+\dots\dots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}\right]$$

0.5

$S_n=\frac{2}{3}V_1\left[1\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right]$ أي $\boxed{S_n=\frac{6}{5}(\sqrt{e}-1)\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}$

حساب: $S'_n=U_1+U_2+\dots\dots+U_n$

لدينا: $U_n=V_n+n$ ومنه:

$$S'_n=(V_1+1)+(V_2+2)+\dots\dots+(V_n+n)$$

$$S'_n=(V_1+V_2+\dots+V_n)+(1+2+\dots+n)$$

$$S'_n=V_1\times\frac{1-q^n}{1-q}+\frac{n}{2}(1+n)$$

$$S'_n=(\sqrt{e}-1)\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}+\frac{n}{2}(1+n)$$

0.5

$$\boxed{S'_n=3(\sqrt{e}-1)\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}}$$

0.25

$$T_n=\frac{S'_n}{n^2}=\frac{3}{n^2}(\sqrt{e}-1)\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}$$

0.25

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{2}}$$

التمرين الثالث : $A(3,2,1)$ $B(3,5,4)$ $C(0,5,1)$

1) إثبات أن ABC متقايس الأضلاع:

$\vec{AB}(0,3,3)$ ، $\vec{AC}(-3,3,0)$ ، $\vec{BC}(-3,0,-3)$

$$AB=\sqrt{0^2+3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(-3)^2+3^2+0^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(-3)^2+0^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

0.5

إذن ABC متقايس الأضلاع $\boxed{AB=AC=BC}$

2) التحقق أن $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوى (ABC):

0.25

$\begin{cases}\vec{n}.\vec{AB}=0+3-3=0\\ \vec{n}.\vec{AC}=-3+3+0=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{AB}\\ \vec{n}\perp\vec{AC}\end{cases}$ أي: $\vec{n}\perp(ABC)$

ومنه $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC)

معادلة (ABC): $x+y-z+d=0$

0.5

$A(3,2,1)\in(ABC)$ أي: $3+2-1+d=0$ أي: $d=-4$ ومنه

$$\boxed{(ABC):x+y-z-4=0}$$

3) أ) تعيين إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC:

0.25

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

أي: $G\left(\frac{3+3+0}{3},\frac{2+5+5}{3},\frac{1+4+1}{3}\right)$ ومنه: $\boxed{G(2,4,2)}$

ب) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

لدينا $G(2,4,2)\in(\Delta)$ و $(\Delta)\perp(ABC)$

0.5

يمكن اعتبار $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

$$\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=2+t\\ y=4+t\\ z=2-t\end{cases}}$$

ج) التحقق أن $F(4,6,0)$ تنتمي إلى (Δ):

0.25

$(\Delta):\begin{cases}4=2+t\\ 6=4+t\\ 0=2-t\end{cases}$ ومنه: $(\Delta):\begin{cases}t=2\\ t=2\\ t=2\end{cases}$ t قيمة وحيدة ومنه $F\in(\Delta)$

حساب حجم $FABC$:

لدينا (Δ) يشمل F و عمودي على (ABC) ويمر من G مركز ثقل ABC ومنه G المسقط العمودي لـ F على (ABC)

إذن FG ارتفاع الهرم $FABC$ الذي قاعدته ABC

$$\boxed{V=\frac{1}{3}A\times FG}$$

حساب A مساحة ABC: ليكن h ارتفاع المثلث ABC

$\left(\frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2+h^2=(\sqrt{18})^2$ ومنه: $h=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$$A=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$FG=\sqrt{(2-4)^2+(4-6)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{3}$$

0.75

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=9}$$

4) إثبات أن $(FA)\perp(BC)$

0.25

$\vec{FA}(-1,-4,1)$ و $\vec{BC}(-3,0,-3)$

$\vec{FA}.\vec{BC}=3+0-3=0$ ومنه $\vec{FA}\perp\vec{BC}$ إذن $(FA)\perp(BC)$

5) أ) تعيين (S) مجموعة النقط M : $\left\|\vec{MG}+\vec{MF}\right\|=6$

لتكن I منتصف $[FG]$ ومنه $\left\|(1+1)\vec{MI}\right\|=6$ أي $MI=3$

0.5

(S) سطح كرة مركزها I و نصف قطرها $r=3$

ب) الوضع النسبي بين (S) و (ABC):

نحسب إحداثيات I : $I(\frac{4+2}{2},\frac{6+4}{2},\frac{0+2}{2})$ ومنه $\boxed{I(3,5,1)}$

نحسب المسافة بين I و (ABC)

لدينا: $d(I,(ABC))=\frac{|3+5-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

0.25

$d(I,(ABC))\prec r$ إذن : (ABC) يقطع (S) وفق دائرة

التمرين الرابع:

I) $g(x)=\frac{-x+1}{-x+3}+\ln(-x+3)$ ، $D_g=]-\infty;3[$

0.5

1) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}3} g(x)=-\infty$

2) اتجاه التغير: $g'(x)=\frac{-2}{(-x+3)^2}-\frac{1}{(-x+3)}$

$g'(x)=\frac{x-5}{(-x+3)^2}$

x	$-\infty$	3
$x-5$	—	

0.5

جدول تغيرات g

x	$-\infty$		3
$g'(x)$		—	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

0.5

3) لدينا f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1,5\ ;\ 1,7[$ وأيضا $f(1,5)\times f(1,7)<0$

لأن: $f(1,7)\approx-0,27$ و $f(1,5)\approx0,07$

ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $1,5<\alpha<1,7$

3) إشارة g :

x	$-\infty$	α	3
g	+	0	-

0.25

II) $f(x)=(x-1)\ln(-x+3)$ ، $D_g=]-\infty;3[$

0.5

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}3} f(x)=-\infty$

2) اتجاه التغير: $f'(x)=1\times\ln(-x+3)+(x-1)\times\frac{-1}{-x+3}$

0.5 $\boxed{f'(x)=g(x)}$

إشارة $f'(x)$ نفس إشارة $g(x)$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		α		3
$f'(x)$		+	0	—	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

0.5

إثبات أن : $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$ لدينا $f(\alpha)=(\alpha-1)\ln(-\alpha+3)$

ولدينا: $g(\alpha)=0$ ومنه: $\frac{-\alpha+1}{-\alpha+3}+\ln(-\alpha+3)=0$

0.5

ومنه: $\ln(-\alpha+3)=\frac{\alpha-1}{-\alpha+3}$ إذن : $f(\alpha)=(\alpha-1)\times\frac{(\alpha-1)}{-\alpha+3}$

0.5

$f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$

حصر : $f(\alpha)$

$1,5\prec\alpha\prec1,7$ إذن $0,5\prec\alpha-1\prec0,7$ ومنه $\boxed{0,25\prec(\alpha-1)^2\prec0,49}$

$-1,7\prec-\alpha\prec-1,5$ إذن $1,3\prec3-\alpha\prec1,5$ ومنه $\boxed{\frac{1}{1,5}\prec\frac{1}{3-\alpha}\prec\frac{1}{1,3}}$

ومنه: $\frac{0,25}{1,5}\prec\frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}\prec\frac{0,49}{1,3}$ ومنه $\boxed{0.2\prec f(\alpha)\prec0.4}$

0.25

حل المعادلة $f(x)=0$ لدينا: $(x-1)\ln(-x+3)=0$

($x-1=0$ أو $\ln(-x+3)=0$) ومنه ($x=1$ أو $-x+3=e^0$)

$\boxed{x=1 \text{ أو } x=2}$

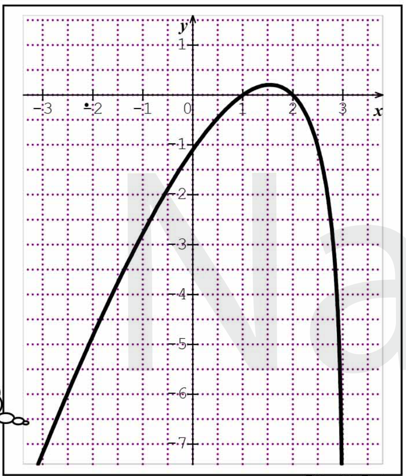
إشارة f :

x	$-\infty$		1		2		3
$x-1$		-	0	+		+	
$\ln(-x+3)$		+		+	0	-	
f		-	0	+	0	-	

4)

0.25 $f(-2)=-3\ln5\approx-4,9$ و $f(-3)=-4\ln6\approx-7,2$

رسم (C_f) :



0.75

5) إثبات أن F دالة أصلية للدالة f

$$F(x)=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2})\ln(-x+3)$$

$$F'(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+(x-1)\ln(-x+3)+(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2})\times\frac{-1}{-x+3}$$

0.5

$$F'(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+(x-1)\ln(-x+3)+\frac{1}{2}\frac{(x^2-2x-3)}{x-3}$$

$$F'(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+(x-1)\ln(-x+3)+\frac{1}{2}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$$

$$F'(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+(x-1)\ln(-x+3)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$F'(x)=(x-1)\ln(-x+3)=f(x)$$